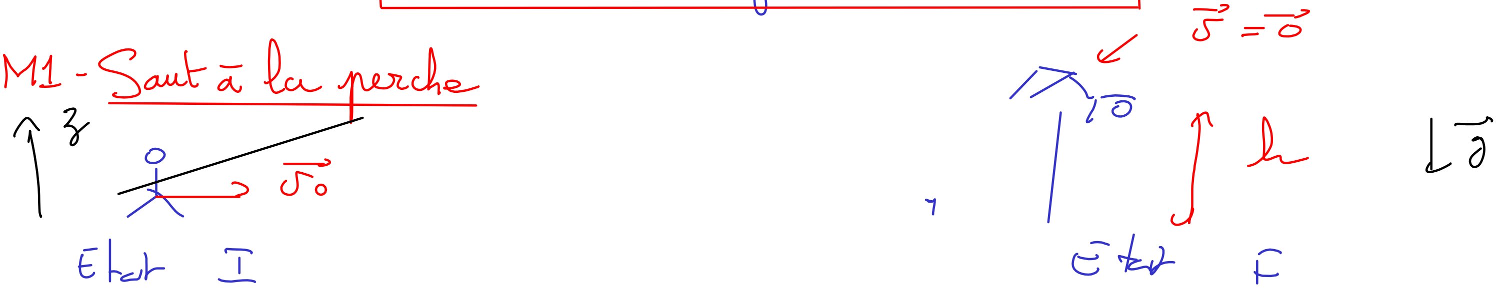
TD M3 - Energétique du point matériel
Corrigé

M1 - Saut à la perche



Syst : perchiste
Réf : terrestre galiléen
Hyp : système conservatif $\Rightarrow E_m = \text{cste}$

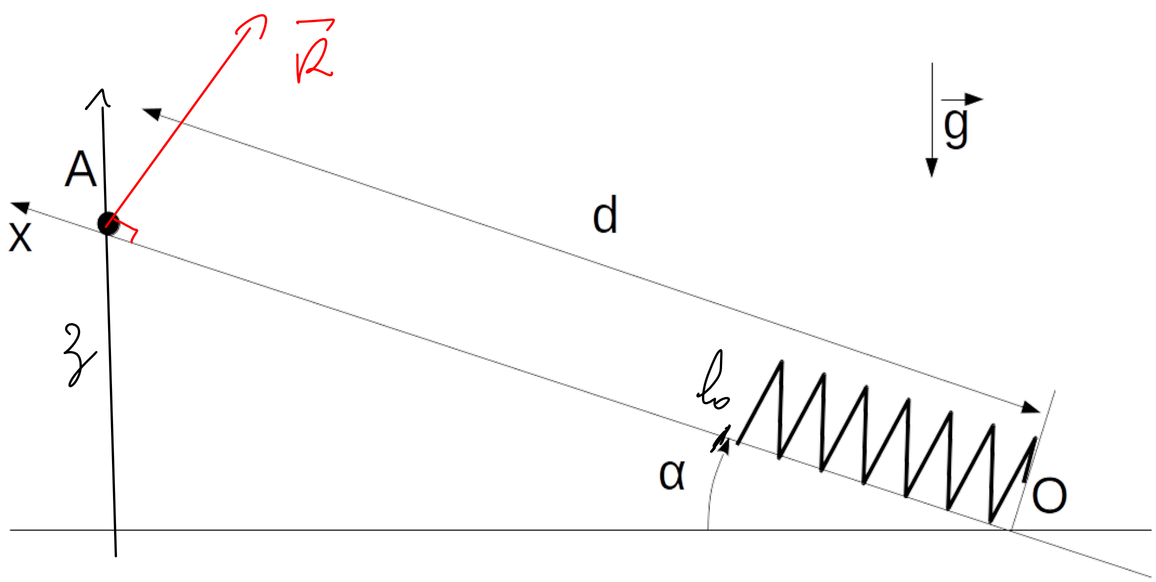
$\Rightarrow E_{m\,I} = E_{m\,F}$ avec $E_{m\,I} = \frac{1}{2} m v_0^2 + K$

$E_{m\,F} = K + mgh$

D'où $\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$

A.N. : $h \approx 5$ m . Bon ordre de grandeur

M2 - Déformation du ressort



Syst : A (m)
Réf : terrestre galiléen
Inventaire des forces :

- poids $\vec{P}$ conservative $E_{pp} = mgz$
  avec $z = x \sin\alpha$
  $E_{pp}(x) = mgx\sin\alpha$

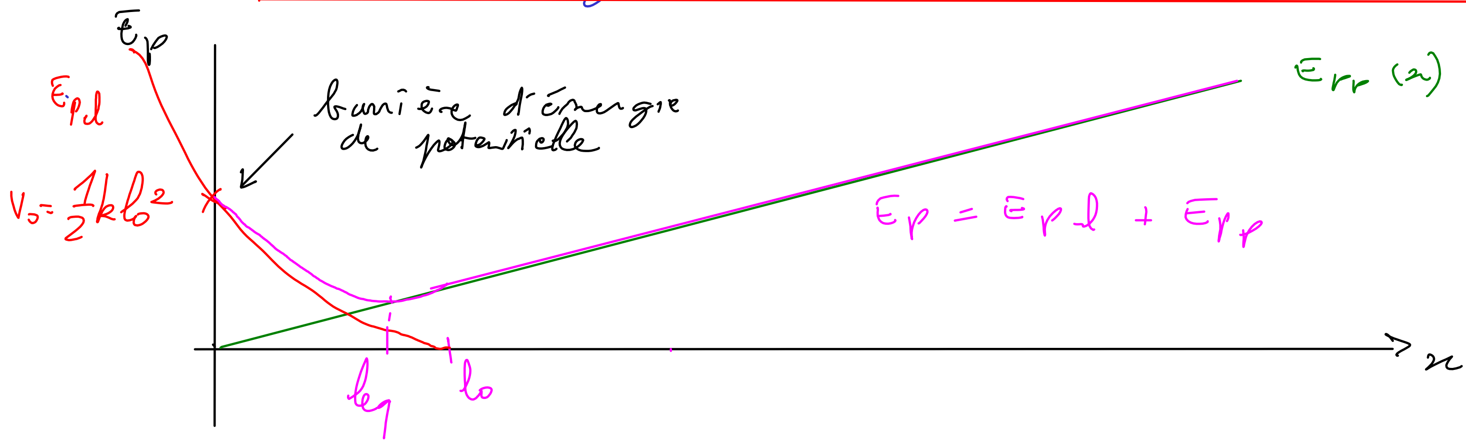
- tension du ressort : $E_p = 0$ si $x \geq l_0$

$E_{p_{el}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ si $x \leq l_0$

avec $l = x \Rightarrow E_{p_{el}} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$

- réact° normale du support : $\vec{R}$: $\delta W(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{dl} = 0$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + mg\sin\alpha\, x + \cancel{K}^{0} \quad \text{si } x \leq l_0 \\ E_p &= mg\sin\alpha\, x \quad \text{si } x \geq l_0 \end{aligned}}$$



2/ Impact en O. Syst conservatif $\Rightarrow E_m = \text{cte}$

Pour arriver en O, il faut franchir la barrière de potentiel en $x = 0$. de hauteur $V_0 = \frac{1}{2}kl_0^2$ soit :

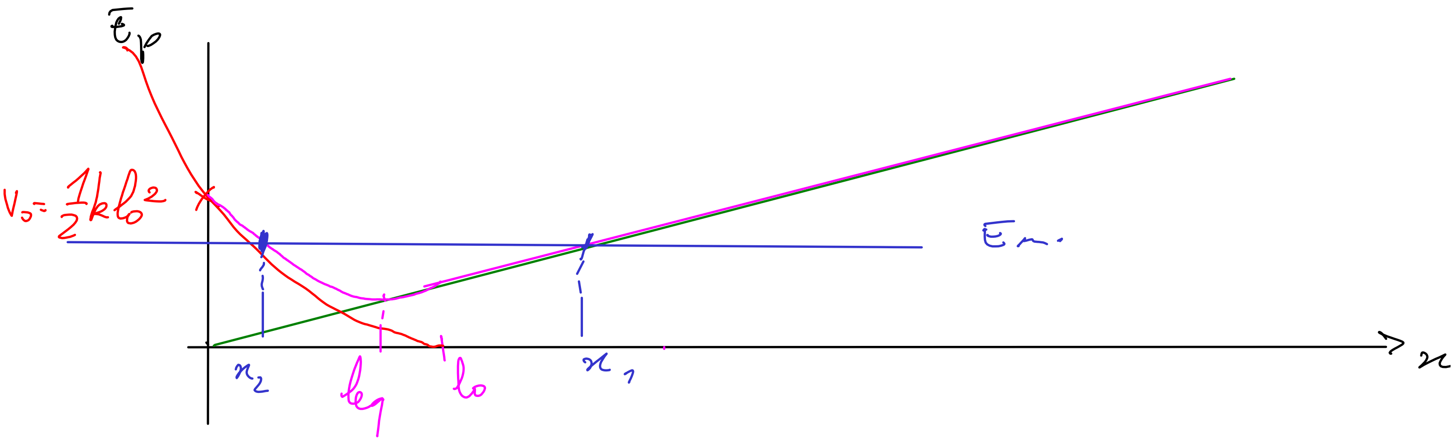
$E_m \geq V_0$ or $E_m = E_{m,0} = (mg\sin\alpha)\, d$

D'où $(mg\sin\alpha)d \geq \frac{1}{2}kl_0^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{d \geq \frac{kl_0^2}{2mg\sin\alpha}}$$

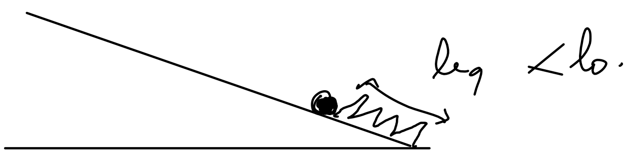
" $\alpha = 0$ $d \geq +\infty$ "
OK car plan horizontale.

3) Pas de collision en O donc $E_m < V_0$



La masse A oscille entre x_1 et x_2 données par $E_m = E_p(x)$.

4/ Si il y a dissipation d'énergie : $E_m \searrow$ donc l'amplitude des oscillations diminue i.e. $x_2 \nearrow$ et $x_1 \searrow$. A l'état final, $E_m = E_p(x_{eq})$ avec $x_{eq} = l_{eq}$ minimum d'énergie potentielle.



5/ ⚠ pour un ressort matériel : $l > 0$ (les spires du ressorts se joignent et la force de rappel du ressort n'est plus valable).

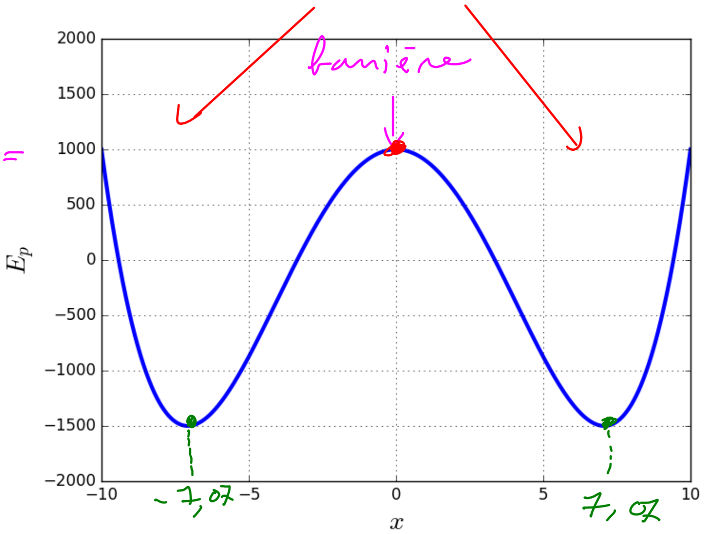
3. Puits double

puits symétriques

barrière

1)

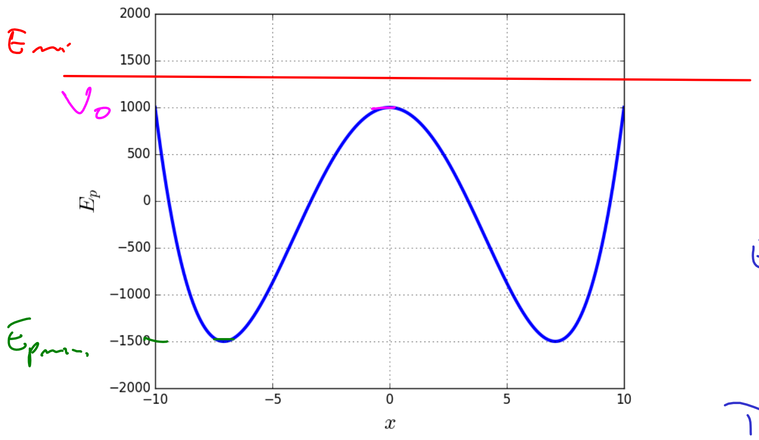
$V_0 =$



- $x = 7{,}07$, $x = -7{,}07$: pos d'équilibre stables
- $x = 0$: pos d'équilibre instable.

2) $M(m)$ à $t=0$ en $x = -7{,}07$ avec $v = v_0$,
v_0 tq M explore le puits de droite ?
Il faut franchir la barrière de potentiel de hauteur $V_0 = 1000$.
Càd :

$$E_m \geq V_0$$



avec $E_m = E_{m,0}$
(frottements négligeable)

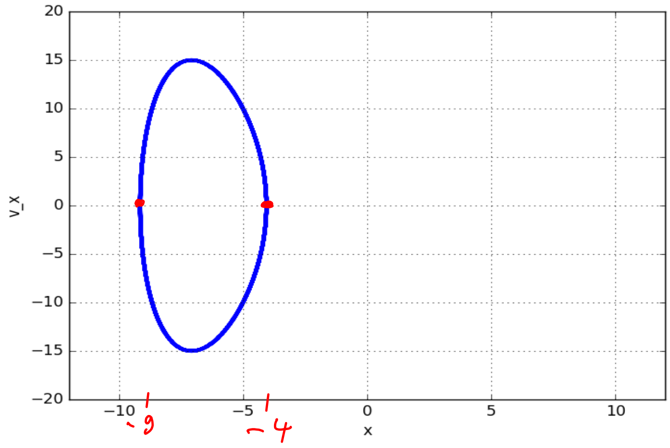
$$E_{m,0} = E_p(x=-7{,}07) + E_c$$
$$= E_{p\,min} + \frac{1}{2} m v_0^2$$

D'où :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \geq V_0 - E_{p\,min}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{2(V_0 - E_{p\,min})}{m}}}$$

4. Trajectoire de phase.



Oscillations périodiques anharmonique dans le puits gauche.

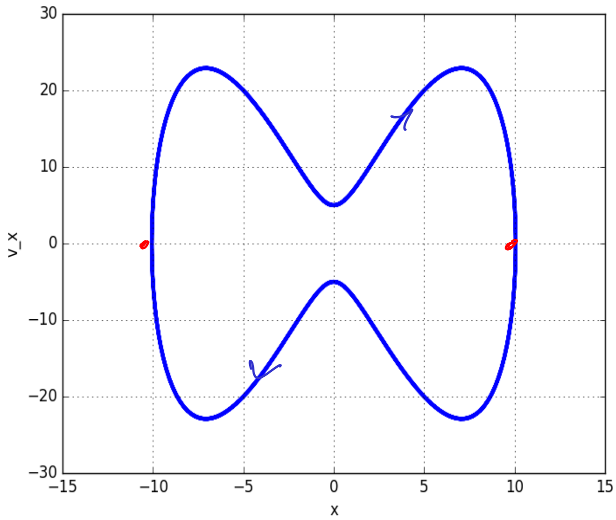
Donc $E_m > V_0$

Evaluons E_m :

Pour $x = -4$ et -9

$E_m = E_p(x) = 0$

graphiquement.



Oscillations périodiques anharmonique dans les deux puits.

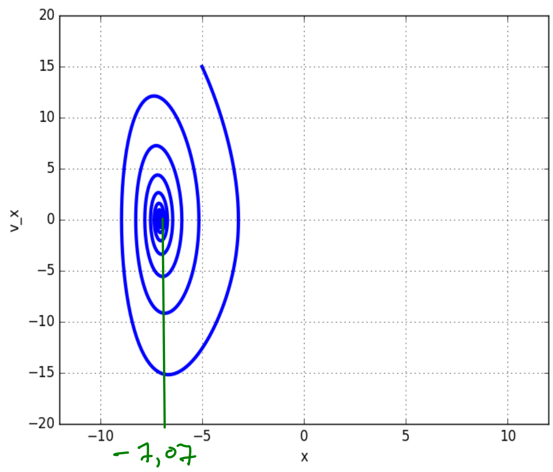
Donc $E_m > V_0$

Evaluons E_m :

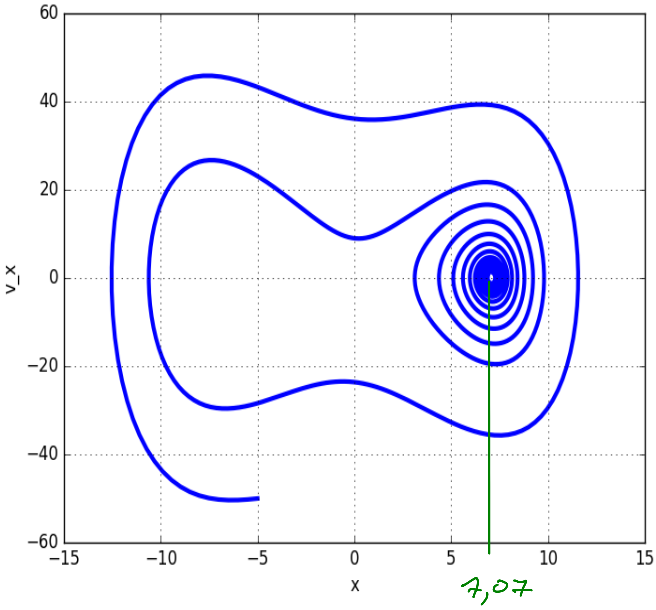
Pour $x = \pm 10$

$E_m = E_p(x) >> 1000$

graphiquement.



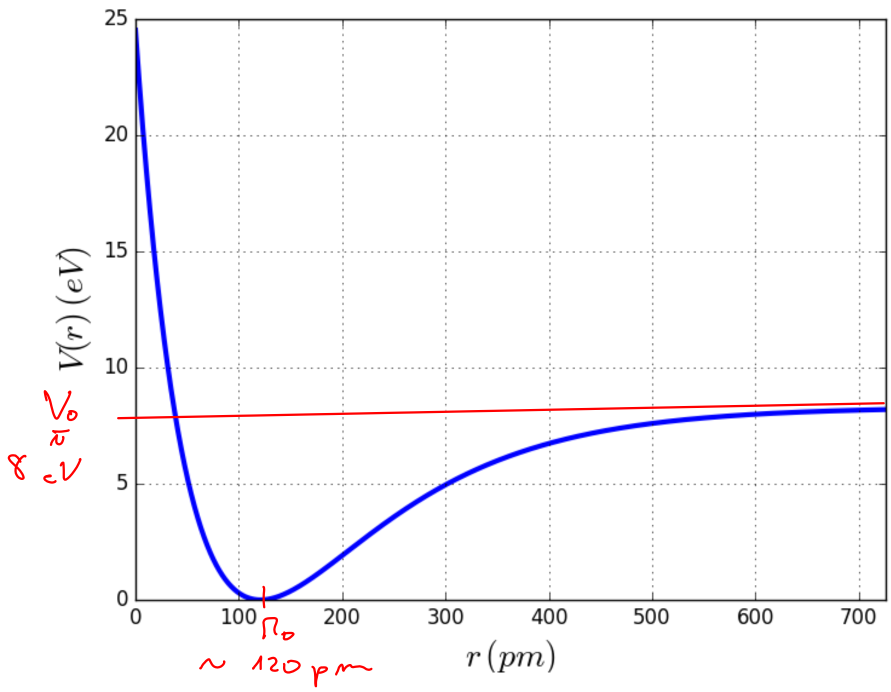
Idem que trajectoire de phase 2 avec dissipation d'énergie. L'amplitude des oscillations décroît. La particule atteint la position d'équilibre stable $x = -7,07$ à l'état final.



Idem que trajectoire de phase 2 avec dissipation d'énergie. L'amplitude des oscillations décroît. La particule est d'abord piégée dans le puits droit lorsque $E_m < V_0$ puis oscille dans ce seul puits jusqu'à atteindre la position d'équilibre stable $x = 7,07$.

M4 - Vibrations de la molécules de monoxyde de carbone.

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-\beta(r - r_0)} \right)^2$$



1/ $[\beta] = ?$ $\quad [\beta(r - r_0)] = \phi$ (arg de exp)

$\Longrightarrow$ $[\beta] = L^{-1}$

2/. $\lim_{r \to +\infty} V(r) = V_0$; V_0 énergie potentielle à l'∞

- $V(r)$ est minimale en r_0 donc r_0 est une pos d'eq stable de l'atome O. Donc r_0 est la longueur de liaison $C \equiv O$ à l'équilibre.
- β ? $\frac{1}{\beta}$ est une longueur. $\frac{1}{\beta}$ est la largeur caractéristique du puits de potentiel.

3/ $E_m < V_0$: l'atome d'oxygène oscille de façon anharmonique autour de $r = r_0$
$\equiv$ vibrat° de la molécule $C \equiv O$

4/ Au voisinage de $r = r_0$, $V(r)$?

0 car r_0 = pos d'équilibre.

$$V(r) = \cancel{V(r_0)} + \cancel{\frac{\partial V}{\partial r}(r_0)}(r-r_0) + \underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0)}(r-r_0)^2 + o((r-r_0)^2)$$

?

$$\frac{\partial V}{\partial r} = V_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(1 - 2e^{-\beta(r-r_0)} + e^{-2\beta(r-r_0)}\right)$$

$$= V_0\left(2\beta e^{-\beta(r-r_0)} - 2\beta e^{-2\beta(r-r_0)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = V_0\left(-2\beta^2 e^{-\beta(r-r_0)} + 4\beta^2 e^{-2\beta(r-r_0)}\right)$$

$$\underline{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2\beta^2 V_0}$$

D'où au voisinage de r_0 à l'ordre 2 en $r - r_0$:

$$\boxed{V(r) \simeq \beta^2 V_0 (r - r_0)^2.}$$

potentiel harmonique.

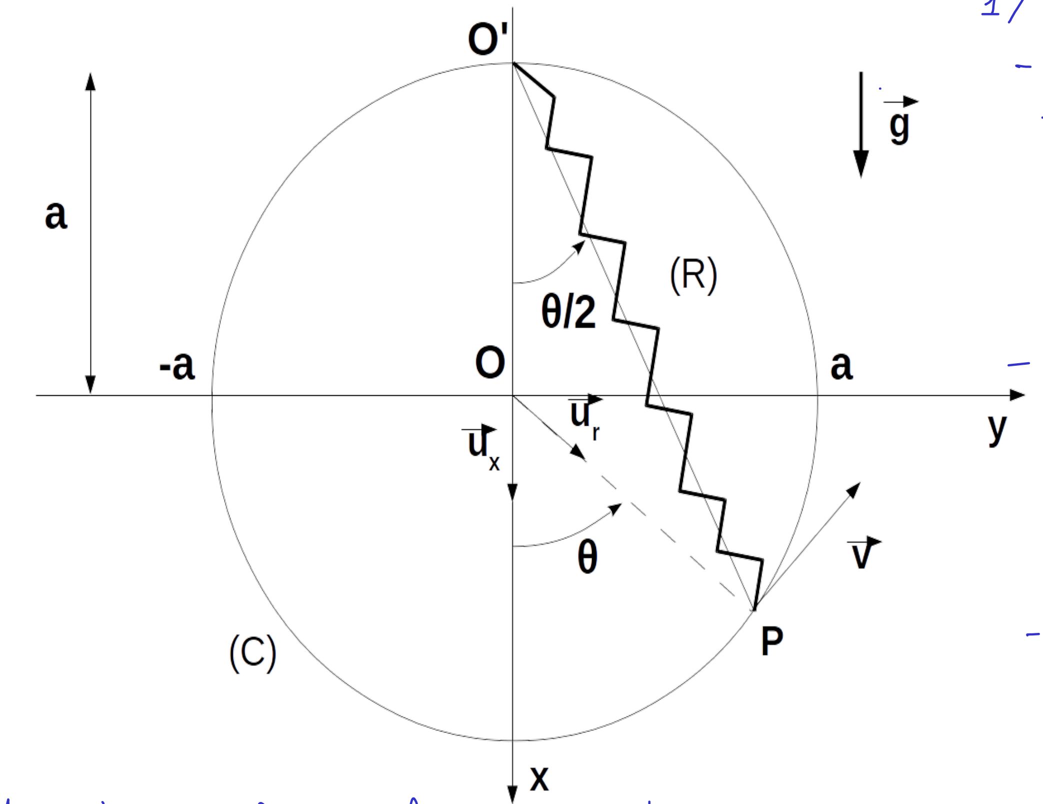
On pose $V(r) = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2 \Leftrightarrow$ $\boxed{k = 2\beta^2 V_0}$

5/ Pulsat° des petites oscillations : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

soit $\boxed{\omega_0 = \beta\sqrt{\frac{2V_0}{m}}}$

6/ $E_m > V_0$: O peut partir à l'∞. Rupture de la liaison $C \equiv O$.

15 - Anneau coulissant avec ressort



1/ Position d'équilibre :

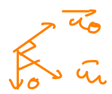
- $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Sa stabilité dépend des intensités relatives du poids et de la tension du ressort.
- $\theta = \pi$ est position d'équilibre si admet que le ressort puisse avoir une longueur nulle. Elle toujours instable.
- Il peut exister une autre position d'équilibre stable $\theta_g \neq 0$ et $\neq \pi$ suivant les intensités relative du poids et de la tension du ressort.

L'existence et la stabilité des positions d'équilibre dépend de k, l_0, m, g et a.

2. Energie potentielle

2.1. $\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$ avec $\vec{OP} = a\,\vec{u_r}$ et $\vec{O'O} = +a\,\vec{u_x}$

avec $\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{u_x} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{O'P} = a(1+\cos\theta)\,\vec{u_x} - a\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$$

$$O'P = \|\vec{O'P}\| = \left(a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right)^{1/2} = a\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= 2a\,(1+\cos\theta)^{1/2}$$

or $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow 1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ d'où :

$$O'P = \left|2a\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Or $\theta \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow \left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| = \cos\dfrac{\theta}{2}$

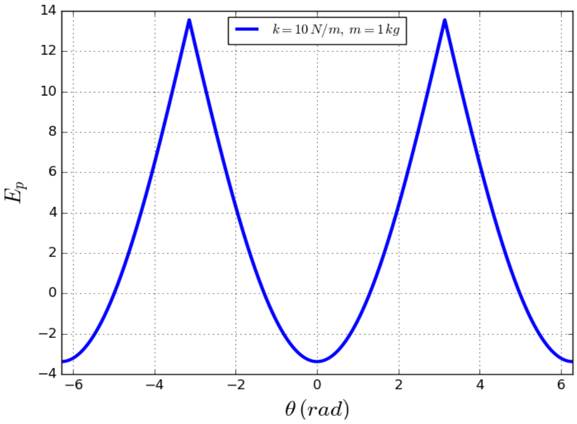
Finalement : $\boxed{O'P = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}}$

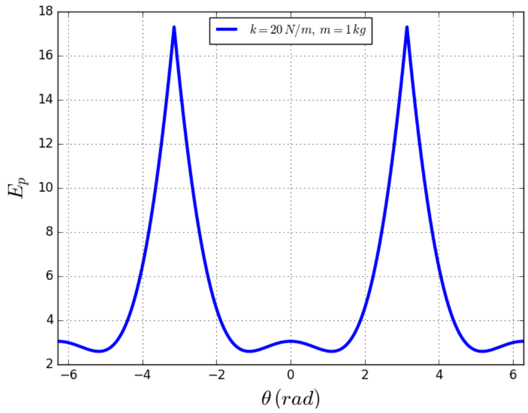
2.2. $E_p = -mgx + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + K$ avec $l = OP = 2a\cos\frac{\theta}{2}$

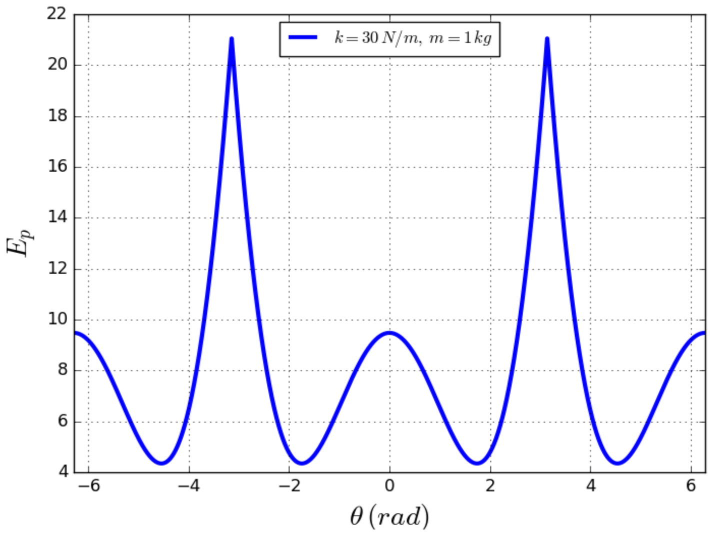
cste.

$x = a\cos\theta$

D'où : $\boxed{E_p(\theta) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + K.}$







3.1. Suivant les valeurs relatives de m, k, l_0 et a :

- $\theta = \pi$ est toujours une position d'équilibre instable. Le point anguleux montre une discontinuité de la force $\vec{F} = -\frac{1}{a}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$.
- ① $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable et $\exists\ \theta_{eq} \neq 0, \pi$ position d'équilibre stable.
- ② $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable et $\nexists\ \theta_{eq} \neq 0, \pi$.

Il y a compétition entre le poids et la tension du ressort. Le passage de ① à ② se fait continûment.

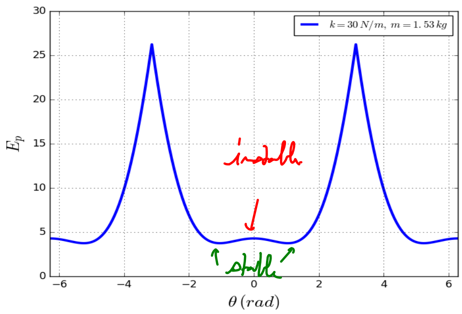
3.2. $a = \frac{2mg}{k}$, $\ell_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{mg}{k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Alors $E_p(\theta) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)^2 + K$

$$= -\frac{ka^2}{2}\cos\theta + \frac{ka^2}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + K$$

$$\boxed{E_p(\theta) = \frac{ka^2}{2}\left[\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \cos\theta\right] + K}$$

Pour info, le graphe de l'énergie potentielle dans ces conditions (k et a arbitrairement fixés)



Les positions d'équilibre θ_{eq} vérifient : $\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)(\theta_{eq}) = 0$

avec $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{ka^2}{2}\left[2 \times 2 \times -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\theta\right]$

avec $\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{ka^2}{2}\left[-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= ka^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = ka^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ainsi : $\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)(\theta_{eq}) = 0 \iff \sin\left(\frac{\theta_{eq}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{\theta_{eq}}{2}\right)\right) = 0$

$$\iff \begin{cases} \sin\frac{\theta_{eq}}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{\theta_{eq}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On restreint l'étude à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par périodicité de $E_p(\theta)$

$$\iff \begin{cases} \theta_{eq} = 0 \text{ ou } \pi \\ \frac{\theta_{eq}}{2} = \pm\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta_{eq} = 0 \text{ ou } \pi \\ \theta_{eq} = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\exists$ quatre positions d'équilibre : 0, $+\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ et π.

3.2. La stabilité des positions d'équilibre est donnée par le signe de $\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right)(\theta_{eq})$.

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = +ka^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\theta}{2} - ka^2 \times \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{ka^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)$$

Pour $\theta = 0$: $\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right)(\theta = 0) = \frac{ka^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) < 0$ $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable

Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{ka^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ est une position d'équilibre stable